i ' . i w r> r> dE>
+ a , ' v ' + b , E',P,G, -^,

la cui composizione non è identica a quella della primitiva, per la presenza delle costanti arbitrarie *a, b,* le quali non possono sparire in niun modo, a meno che non si suppongano mancanti le *u, v.* Da ciò concludiamo intanto che ogni formola rappre-sentatrice di una proprietà assoluta è formata solamente colle F, F, G e colle loro derivate parziali *).

Ma il concetto di queste funzioni, che si possono chiamare *assolute* come le pro prietà geometriche che rappresentano, è suscettibile di un'utile estensione. Consideriamo, oltre le *E, F9* G, altre funzioni <p, ^, ... di *u, v,* e supponiamo che quello stesso cambiamento di variabili, il quale trasforma l'espressione (34) nella (34'), trasformi pa rimente le cp, ^,... nelle <p', <]/, Un'espressione formata colle F, F, G, <p, 4 1 ?--- e colle loro derivate parziali rispetto alle *u, v* si dirà *invariabile* quando, per l'anzidetto cambiamento di variabili, essa si trasformerà in un'espressione formata analogamente colle £", F', G', *<p'y* ^', ... e colle loro derivate parziali rispetto alle «', *v'.*

È facile concepire di qual natura sieno le proprietà geometriche che corrispondono a queste nuove espressioni. Se si eguagliano le funzioni co, <|, ... ad altrettante costanti od a parametri arbitrarii, si ottengono le equazioni di certe curve o di certi sistemi di curve tracciate sulla superficie : ora le proprietà rappresentate da quelle espressioni sono di tal natura, che non vengono punto modificate dai cambiamenti di forma di cui la superficie data è suscettibile, sebbene poi dipendano dalle curve <p, •];,...; ossia sono relazioni geometriche che hanno luogo fra queste curve, indipendentemente dalla natura delle linee coordinate.

Se le funzioni cp, ^, . .. fossero *assolute, è* chiaro che ogni funzione *invariabile* formata con esse fornirebbe una nuova funzione assoluta. È appunto in ciò che risiede, a nostro avviso, Futilità delle funzioni invariabili, la cui ricerca sembra presentare minori difficoltà di quella delle funzioni assolute.

Il criterio che ci servirà per riconoscere le funzioni invariabili, quando esse non saranno l'immediata traduzione analitica di proprietà geometriche indipendenti dalla forma della superficie, è semplicissimo. Ogni volta che, considerando una superficie come riferita a due differenti sistemi di coordinate curvilinee *(11,* t;), (V, i;'), perverremo ad una eguaglianza fra due espressioni, in una delle quali entrino solamente le quantità F, F, G, 9, A, ... e le loro derivate rispetto alle *u, v,* nell'altra solamente le £', F', G', 9', <!/,

. . . e le loro derivate rispetto alle *u'₉ v', sen%a che vi sia traccia*

*) L'idea di considerare e di cercare direttamente queste funzioni, partendo dalla loro proprietà caratteristica, è dovuta al sig. CASORATI. Si vegga la citata Memoria.